NOEN KRITISKE KOMMENTARER TIL PERT

TERJE HANSEN
FINN KYDLAND

1. *INNLEDNING*

Prosjektplanlegging ved hjelp av PERT (Program Evaluation and Review Technique) er et relativt nytt hjelpemiddel som også har fått en viss utbredelse i Norge. Metoden er behandlet i to artikler i Bedriftsøkonomen 1963, nr. 4 og 5 av henholdsvis Arne Mjøsund og Harald Smedal jr.

Som kjent benyttes PERT først og fremst til å beregne den forventede tid et prosjekt vil ta. De fleste computer-programmer, blant annet IBM's, gir også sannsynlighetsutsagn for at prosjektet skal være ferdig innen en bestemt tid. Slike sannsynlighetsutsagn kan være av avgjørende betydning i bedriftens beslutningsprosess når det påløper mulkter for overskridelse av avtalt tid for prosjektet.

Hensikten med denne artikkelen er å illustrere ved hjelp av fiktive eksempler at PERT undervurderer den forventede tid et prosjekt vil ta og at sannsynlighetsutsagnene som gis kan være lite å stole på.

Før vi går videre, vil det kanskje være en fordel med en kort repetisjon av PERT. De som er interessert i en mer utførlig beskrivelse, henvises til ovennevnte artikler.

2. *Kort om PERT.*

Vi skal ta vårt utgangspunkt i et fiktivt prosjekt som vi antar er karakterisert ved nettverket i figur 1.

La oss så innføre noen begreper.

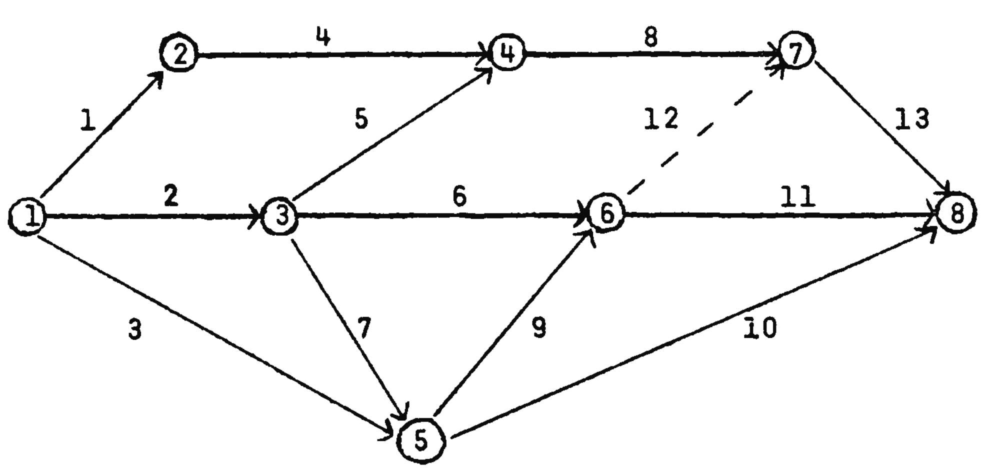
a. *Aktivitet.*
En aktivitet er et tidsforbrukende element i et nettverk. I vårt eksempel har vi således 13 aktiviteter.

b. *Begivenhet.*
En aktivitets start- og endepunkt kalles begivenheter. Inn og ut av en begivenhet kan det gå en eller flere aktiviteter. De aktiviteter som går ut av en begivenhet kan ikke påbegynnes før de som går inn er ferdig. I eksempelet ovenfor kan således aktivitet 10 ikke påbegynnes før aktivitet 3 og 7 er ferdig.

c. *Dummyaktivitet.*
En dummyaktivitet er en aktivitet som har tidsforbruk 0. Den hjelper å bevare den logiske strukturen i systemet. Dummyaktivitetene vil vi i figurene tegne med brutt strek. I vårt eksempel er aktivitet 12 en dummyaktivitet. Fortolkningen er da at aktivitet 13 ikke kan påbegynnes

Aktivitets start- begivenhet	ende- begivenhet	Tidsanslag o	m	p	Forventet tid	Varians
1	2	2	3	4	3	0,11
1	3	4,5	6,5	11,5	7	1,36
1	5	10	15	17	14,5	1,36
2	4	5,8	7	8,8	7,1	0,25
3	4	3,8	6,2	10,4	6,5	1,21
3	6	9	12	15	12	1,00
3	5	7,8	9,6	13,8	10	1,00
4	7	2,5	6	6,5	5,5	0,44
5	6	3	3,8	5,8	4	0,22
5	8	7	10	13	10	1,00
6	8	5	7	7,8	6,8	0,22
6	7	0	0	0	0	0
7	8	4,6	6,5	9	6,6	0,54

Tabell 1.



Figur 1.

før aktivitet 6 og 9 begge er ferdige (i tillegg til aktivitet 8).

d. *Forventet tidsforbruk for en aktivitet.*
For hver aktivitet har vi 3 tidsanslag; et optimistisk tidsanslag (o), et pessimistisk tidsanslag (p) og et mest sannsynlig tidsanslag (m). På grunnlag av disse tidsanslagene regner man så ut det forventede tidsforbruk for aktivitet i ved hjelp av formelen [1]

1) $$\mu_i = \frac{o_i + 4m_i + p_i}{6}$$

[1]) La tidsforbruket for aktivitet i betegnes ved t_i. 1) bygger da på at

$$x_i = \frac{t_i - o_i}{p_i - o_i}$$

er β-fordelt, dvs. at sannsynlighetstettheten for x_i er gitt ved

$$f(x_i) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)} x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1}, \quad 0 < x_i < 1$$

og da således at variansen av x_i er lik $\frac{1}{36}$ og typetallet er lik $\frac{m_i - o_i}{p_i - o_i}$. Man kan da vise at

$$\mu_i \backsim \frac{o_i + 4m_i + p_i}{6},$$

der $\backsim$ betegner tilnærmet lik.

μ_i er altså et veiet gjennomsnitt av det mest optimistiske, det mest pessimistiske og det mest sannsynlige tidsanslag.

La oss anta at tidsanslagene for ovennevnte prosjekt er som angitt i tabell 1.

Vi setter inn i nettverksdiagrammet forventet tidsforbruk for hver aktivitet, som figur 2 viser. Den kritiske (lengste) vei gjennom nettverket er den rekkefølgen av aktiviteter som har høyest totalt forventet tidsforbruk når vi går gjennom nettverket i den retning pilene viser. Forventet tidsforbruk for hele prosjektet settes lik forventet tid langs den kritiske vei. I vårt eksempel går den kritiske vei gjennom begivenhetene 1-3-5-6-8, og forventet tid i henhold til PERT blir 27,8. Den kritiske vei tegnes med tykk strek.

For de aktivitetene som ligger langs den kritiske vei, summerer man så variansene[1]. La oss betegne summen av variansene[2] med V og PERT forventet tid med M. En antar så at den tiden prosjektet vil ta, T, er tilnærmet normalfordelt med varians V og forventning M. Dette benyttes så til å anslå sannsynligheten for at prosjektet vil være ferdig innen et bestemt tidspunkt[1].

3. *Feilkilder ved PERT-metoden.*

Hensikten med PERT i motsetning til CPM (Critical Path Method) er å trekke inn usikkerhet med hensyn til tidsforbruket til de enkelte aktiviteter som inngår i nettverket, idet man jo antar at dette kan anta tilfeldige verdier mellom o (det mest optimistiske tidsanslag) og p (det mest pessimistiske tidsanslag) i henhold til en nærmere bestemt sannsynlighetsfordeling karakterisert ved tidsanslagene o, m og p.

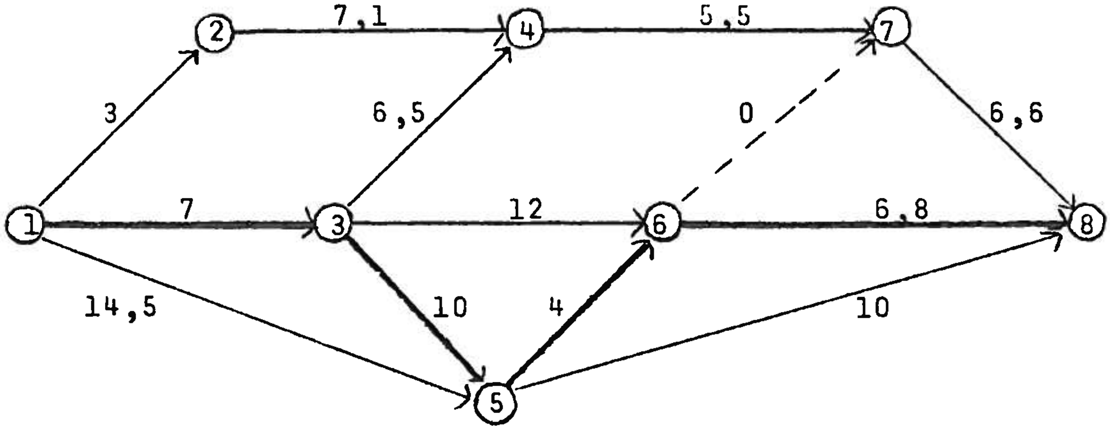
Når vi i PERT setter inn i nettverket den forventede tid, μ, for hver aktivitet for så å finne den kritiske vei, ser vi i realiteten bort fra at tidsforbruket til aktivitetene i nettverket er tilfeldig, idet hver aktivitet nå er assosiert med kun et tidsforbruk, nemlig μ.

[1]) Hvis aktivitet i ligger på den kritiske vei, så er variansen for tidsforbruket for aktivitet i gitt ved

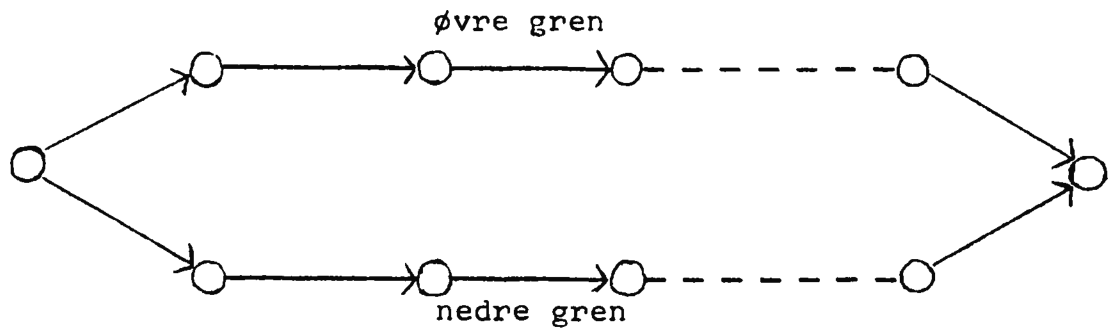
$$V_i = \frac{(p_i - o_i)^2}{36}.$$

[2]) I ovennevnte eksempel blir således V = 1,36+1,0+0,22+0,22=2,8.

[1]) IBM's PERT program bruker en annen fremgangsmåte idet V beregnes på følgende måte: Man setter inn variansen for tidsforbruket for hver enkelt aktivitet i nettverket. Den lengste veien gjennem nettverket med hensyn på variansene beregnes og summen av disse variansene settes lik V. M beregnes som før. I ovennevnte eksempel blir således V=1,36+1,21+0,44+0,54=3,55 (gjennom begivenhetene 1—3—4—7—8).



Figur 2.



Figur 3.

Etter at man så har funnet den kritiske vei, benytter man seg i tradisjonell PERT av sannsynlighetsfordelingene langs den kritiske vei til å anslå sannsynligheten for at prosjektet vil være ferdig innen et bestemt tidspunkt. Man betrakter da igjen tidsforbruket til de aktivitetene som ligger på den kritiske vei som tilfeldig, ***men man ser her bort fra de aktivitetene som ikke ligger på den kritiske vei.***

Et enkelt, men noe ekstremt eksempel, vil illustrere feilene som gjøres. La oss tenke oss at vi har et prosjekt som er karakterisert ved to parallelle grener som vist i figur 3.

La oss tenke oss at $o_i = m_i = p_i = \mu_i$ for alle aktivitetene langs den øvre gren, men at dette ikke er tilfelle langs den nedre gren. Vi antar at total forventet tid langs øvre gren, M_1, som er identisk med tidsforbruket langs øvre gren, er større enn total forventet tid langs den nedre gren, M_2. La den kumulerte sannsynlighetsfordeling [1]) for total tid langs den nedre gren være som i figur 4 og la T_2 betegne tidsforbruket langs nedre gren.

Sannsynligheten for at T_2 skal være større enn M_1 er altså 0,4. Vi må da selvfølgelig ha at det forventede tidsforbruk for prosjektet blir større enn M_1 siden vi forventer at i 6 av 10 tilfelle vil det ta M_1 før prosjektet er ferdig, *men* i 4 av 10 tilfelle vil det ta mer enn M_1.

I figur 5 er så den virkelige kumulerte sannsynlighetsfordeling for den tid prosjektet tar, T, og den virkelige forventede tid, M_3, tegnet inn. Figuren viser også PERT kumulert sannsynlighetsfordeling.

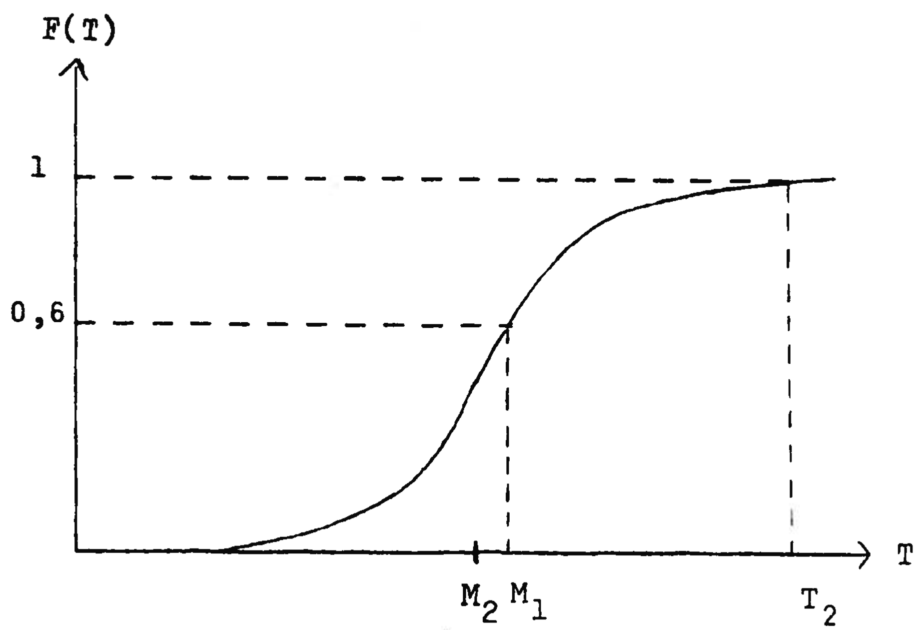
Figur 5 illustrerer to forhold:

a) PERT undervurderer den forventede tid prosjektet vil ta. Dette er i figuren karakterisert ved at $M_3 > M_1$. Dette vil, bortsett fra helt spesielle tilfelle, alltid være tilfelle.

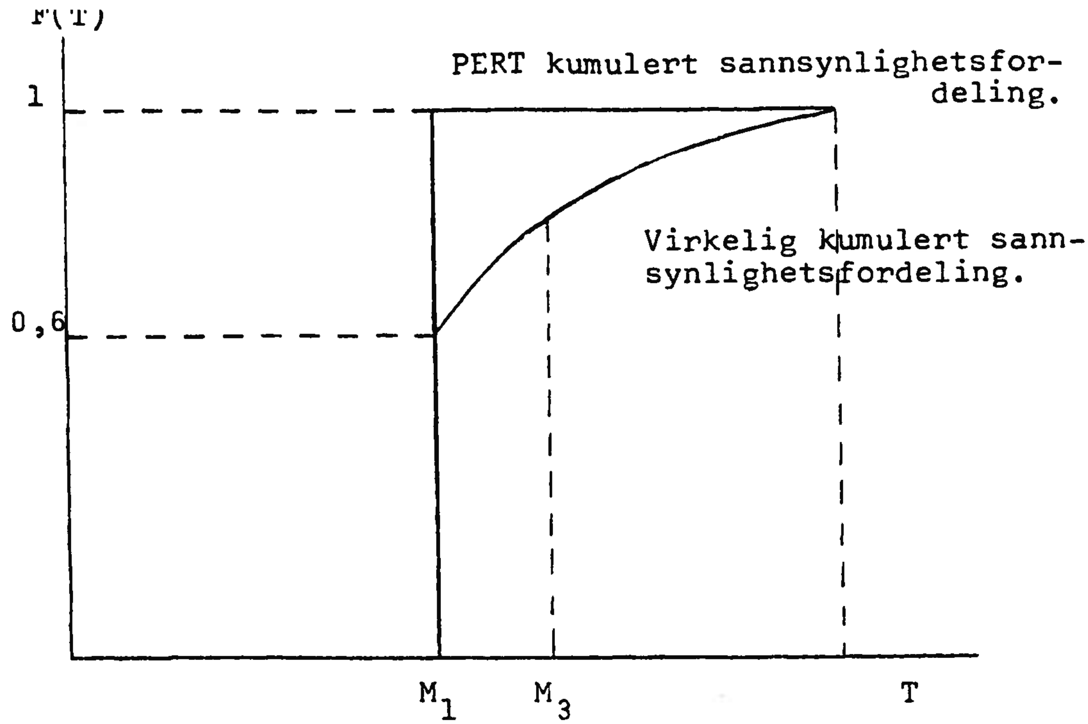
b) Det er tildels store avvik mellom den virkelige kumulerte sannsynlighetsfordeling og den kumulerte sannsynlighetsfordeling etter PERT. Således anslår PERT sannsynligheten for at prosjektet skal være ferdig innen M_1 til 100%, mens den virkelige sannsynlighet er 60%.

Det spørsmål som dette enkle eksempel umiddelbart reiser, er hvorledes en så kan beregne forventet tid for et prosjekt og sannsynligheten for at prosjektet skal være ferdig innen et bestemt tidspunkt? En mulighet er å simulere nettverket. La oss derfor se litt nærmere på simulering.

[1]) Den kumulerte sannsynlighetsfordeling F(x) for en tilfeldig variabel x gir sannsynligheten for at den tilfeldige variabel skal anta en verdi lavere enn x.



Figur 4.



Figur 5.

4. *Simulering av et nettverk.*

For å introdusere simulering la oss anta at en bestemt aktivitet har følgende tidsforbruk med dertil hørende sannsynlighet

Tidsforbruk	Sannsynlighet
12	0,1
13	0,2
14	0,4
15	0,2
16	0,1
	1,0

Vi lar så de hele tallene mellom 1 og 10 korrespondere til tidsforbruket på følgende måte

1	svarer	til	et	tidsforbruk	på	12
2—3	»	»	»	»	»	13
4—7	»	»	»	»	»	14
8—9	»	»	»	»	»	15
10	»	»	»	»	»	16

La oss nå tenke oss at vi skriver tallene 1 til 10 på 10 lapper og legger dem i en hatt. Vi trekker så en lapp ut av hatten og tallet på lappen bestemmer aktivitetens tidsforbruk. Får vi ut tallet 6, får således aktiviteten et tidsforbruk på 14.

Legg merke til at siden der er 10 lapper i hatten og en av disse resulterer i et tidsforbruk på 12, så er sannsynligheten for et tidsforbruk på 12 0,1. Tilsvarende er sannsynligheten for et tidsforbruk på 13 0,2 osv.

Fremgangsmåten vi har benyttet ovenfor er en illustrasjon av simulering av tidsforbruket til en aktivitet.

La oss nå vende tilbake til vårt opprinnelige problem. Vi er interessert i det forventede tidsforbruk og den kumulerte sannsynlighetsfordeling for tidsforbruket til et prosjekt. La oss anta at der er n aktiviteter og at tidsforbruket for hver enkelt aktivitet er karakterisert ved en nærmere bestemt sannsynlighetsfordeling. Vi kan da gå frem på følgende måte:

a. For hver aktivitet simulerer vi tidsforbruket. Vi får da n tidsforbruk, ett for hver aktivitet.
b. Vi setter inn de simulerte tidsforbruk i nettverket og finner den kritiske veien og prosjektets tidsforbruk.
c. a—b gjentas et stort antall ganger, og hver gang registrerer vi tidsforbruket for prosjektet.
d. På grunnlag av tidsforbruket til prosjektet i hver enkelt simulering regner vi ut gjennomsnittlig tidsforbruk, som blir tilnærmet lik prosjektets forventede tidsforbruk. Dessuten konstruerer vi en kumulert hyppighetsfordeling for tidsforbrukene, som blir tilnærmet lik den kumulerte sannsynlighetsfordeling for tidsforbruket til prosjektet.

I Appendix er det redegjort for det statistiske grunnlag for simuleringene.

Det er naturlig av leseren å reise spørsmålet: Hvorfor benytter vi oss ikke av den fremgangsmåten som er beskrevet ovenfor istedenfor tradisjonell PERT? En av grunnene er at simulering av generelle β-fordelinger er svært tidkrevende og at simulering av større prosjekter derfor ikke er praktisk.

5. *Simulering av tre eksempler.*

Vi har laget tre eksempler som alle består av ca. 30 aktiviteter, men som i sin oppbygning er nokså forskjellige. Hver aktivitet har fått en tilfeldig av de seks β-fordelinger vi har spesifisert i appendix, og hvert nettverk er så simulert 500 ganger på en IBM 360/50.

Som et mål på hvor kritisk hver aktivitet er, har vi konstruert en kritikalitetsindeks. For hver simulering registrerer vi hvilke aktiviteter som er kritiske, og summerer antall ganger hver aktivitet er kritisk. Etter at alle simuleringer er ferdige, dividerer vi hver av disse summene på antall simuleringer, og dette gir så aktivitetenes kritikalitetsindekser. Disse indekser vil bli tall mellom 1 og 0, og nærmere 1 jo oftere aktiviteten er kritisk[1]. Indeksene skulle kunne gi en pekepinn om hvilke aktiviteter det svarer seg å sette noe inn på å forsere, for derved å redusere prosjektets totale tid. Det behøver nemlig ikke å gi noen særlig tellende reduksjoner i forventet totaltid ved kun å konsentrere seg om de aktiviteter som er kritiske i vanlig PERT-forstand. Vi har valgt å sette kritikalitetsindeksene på hver aktivitet i figurene.

For hvert nettverk har vi tegnet de kumulerte sannsynlighetsfordelinger på grunnlag av både simuleringene, tradisjonell PERT og IBM's metode.

Kritikalitetsindeksene viser at sannsynligheten for at en aktivitet er kritisk, kan være under 20 % selv om denne aktivitet er kritisk etter PERT-metoden. På den annen side kan kritikalitetsindeksen være opp til ca. 45 % uten at aktiviteten er kritisk etter PERT-metoden. Dette illustrerer hvor uheldig det kan være å konsentrere sin oppmerksomhet utelukkende om de aktiviteter som er kritiske etter PERT-metoden.

Eksempel 1.

Aktivitets start-	ende-begivenhet	o	p	μ	V	Sannsynl-fordeling nr.[1])
1	2	3,5	5,0	4,25	0,06	3
1	3	2,5	4,1	3,41	0,08	2
1	4	8,0	9,5	8,50	0,07	6
2	7	7,0	15,0	10,43	1,96	4
2	5	4,0	5,5	5,00	0,07	1
3	5	4,9	6,9	5,57	0,13	6
3	6	4,9	7,0	5,69	0,12	5
3	4	3,6	6,6	5,10	0,25	3
4	9	3,0	3,9	3,34	0,02	5
4	10	6,0	11,0	7,87	0,65	5
5	7	4,0	8,0	6,29	0,49	2
5	8	3,1	7,0	5,05	0,42	3
5	9	2,0	3,0	2,50	0,03	3
6	9	2,7	3,3	2,96	0,01	4
7	11	2,0	6,0	3,71	0,49	4
8	11	3,0	6,0	5,00	0,29	1
8	12	5,0	10,0	6,67	0,79	6
9	12	8,0	12,4	10,20	0,54	3
9	15	12,0	20,0	15,00	1,67	5
10	12	5,0	7,5	6,25	0,17	3
10	15	9,0	15,0	12,43	1,10	2
11	14	9,0	13,0	10,71	0,49	4
11	13	5,0	11,0	8,00	1,00	3
12	13	4,0	9,5	6,36	0,93	4
12	15	3,5	6,0	4,93	0,19	2
13	16	4,0	6,6	5,73	0,22	1
14	16	2,0	5,0	3,00	0,29	6
14	17	10,0	17,0	13,50	1,36	3
15	16	4,0	7,5	6,00	0,38	2
16	17	8,0	11,0	9,29	0,28	4

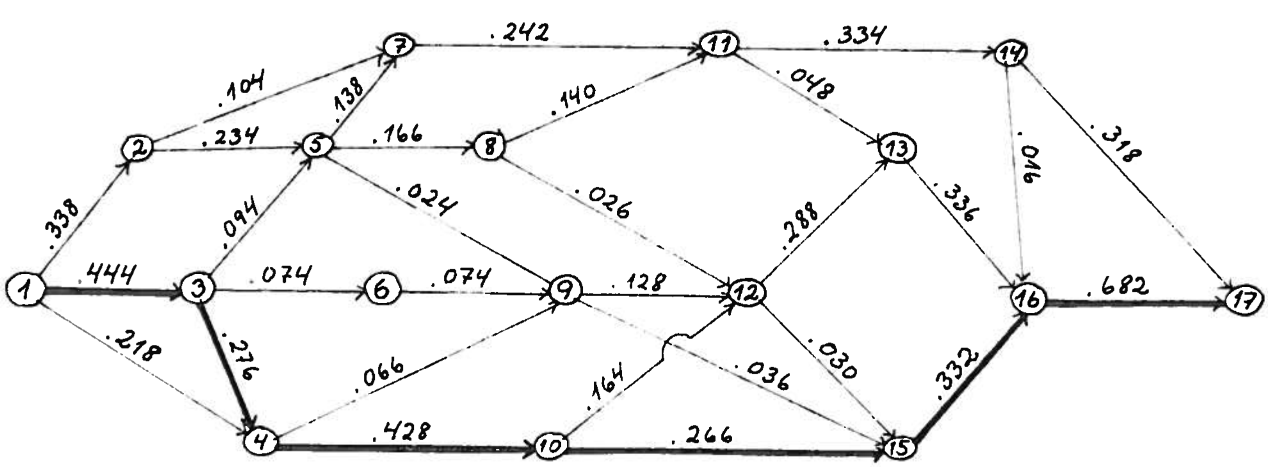
Tabell 2.

1) Se tabell 6 i Appendix.

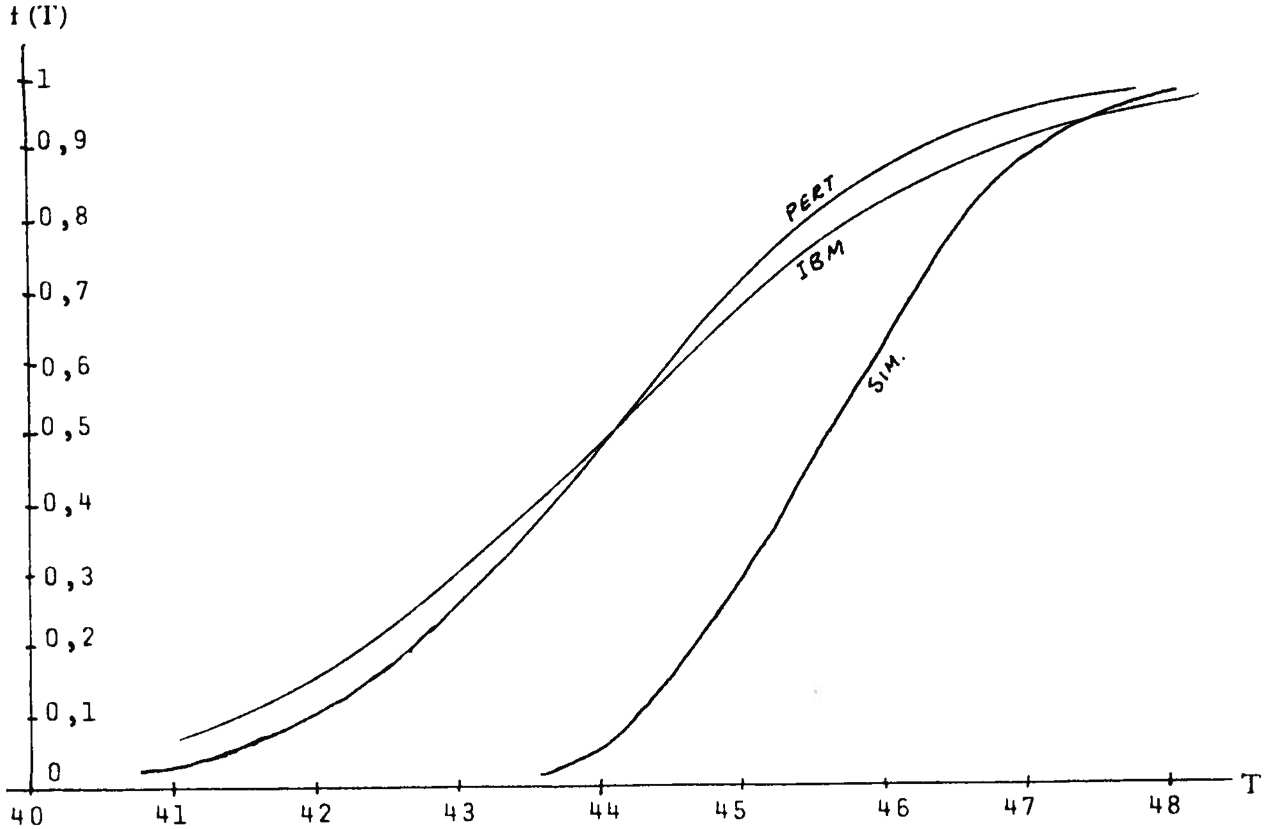
Sammenligning av simulerte tider med teoretisk PERT:

I eks. I er der mange aktiviteter på tvers i nettverket, dvs. aktivitetene er meget avhengige av hverandre, og det viser seg at PERT-feilene da til en viss grad blir jevnet ut, og avviket i forventet tid er her minst. I de to siste eksemplene består nettverket i større grad av parallelle grener, og da vil PERT-feilene generelt øke. I de tre eksemplene varierer avvikene for PERT i forhold til simulert forventet tid med fra 3,5 til 6 %.

[1]) Til sammenligning kan man si at PERT bare gir tallene 1 og 0, nemlig 1 hvis aktiviteten er kritisk og 0 hvis den ikke er det.



Figur 6.



Figur 7.

I kolonne A, B og C har vi beregnet noen sannsynlighetstall som her skal forklares nærmere.

Kolonne A. I denne kolonne har vi på grunnlag av de simulerte verdier for forventet tid og standardavvik beregnet sannsynligheten for at prosjektets tid vil ligge under PERT-beregnet forventet tid [1]). PERT (og altså også IBM's program) vil oppgi denne sannsynlighet til 50 %, mens man på grunnlag av simulering finner at sannsynligheten i våre eksempler skal ligge på fra 4 til 8 %.

Kolonne B. Her har vi med de PERT-beregnede tall for gjennomsnitt og standardavvik som grunnlag beregnet sannsynligheten for at prosjekttiden vil ligge under den simulerte gjennomsnittlige kritiske tid [1]). Denne sannsynlighet skal være 50 %, men PERT vil i våre eksempler få sannsynligheter på mellom 83 og 92 %.

Kolonne C. Her er tilsvarende tall som i kolonne B, men nå med standardavvik etter IBM's metode som grunnlag.

Eksempel II.

Aktivitets start-	ende-begivenhet	o	p	μ	V	Sannsynl.-fordeling nr.
1	2	4,0	7,0	5,71	0,28	2
1	3	8,0	13,0	10,50	0,69	3
1	4	11,0	20,0	14,86	2,48	4
1	5	5,0	11,0	7,00	1,14	6
1	15	8,0	14,0	11,00	1,00	3
2	6	13,0	20,0	17,67	1,56	1
3	7	4,0	9,0	6,50	0,69	3
4	8	7,0	12,0	8,87	0,65	5
5	9	8,0	13,0	10,86	0,77	2
6	10	5,0	10,0	7,50	0,69	3
7	10	10,0	17,0	13,00	1,50	4
7	11	7,0	13,0	9,00	1,14	6
8	11	2,0	6,0	3,50	0,42	5
9	12	9,0	17,0	13,00	1,78	3
10	13	6,0	11,0	9,33	0,79	1
11	14	8,0	15,0	11,00	1,50	4
12	14	5,0	9,0	7,29	0,49	2
12	18	3,0	7,0	5,00	0,44	3
13	16	9,0	19,0	12,75	2,60	5
14	16	10,0	18,0	14,57	1,96	2
15	17	6,0	11,0	8,86	0,77	2
16	20	4,0	7,0	5,29	0,28	4
17	18	12,0	20,0	16,00	1,78	3
18	19	8,0	14,0	11,00	1,00	3
19	20	8,0	15,0	10,33	1,56	6

Tabell 3.

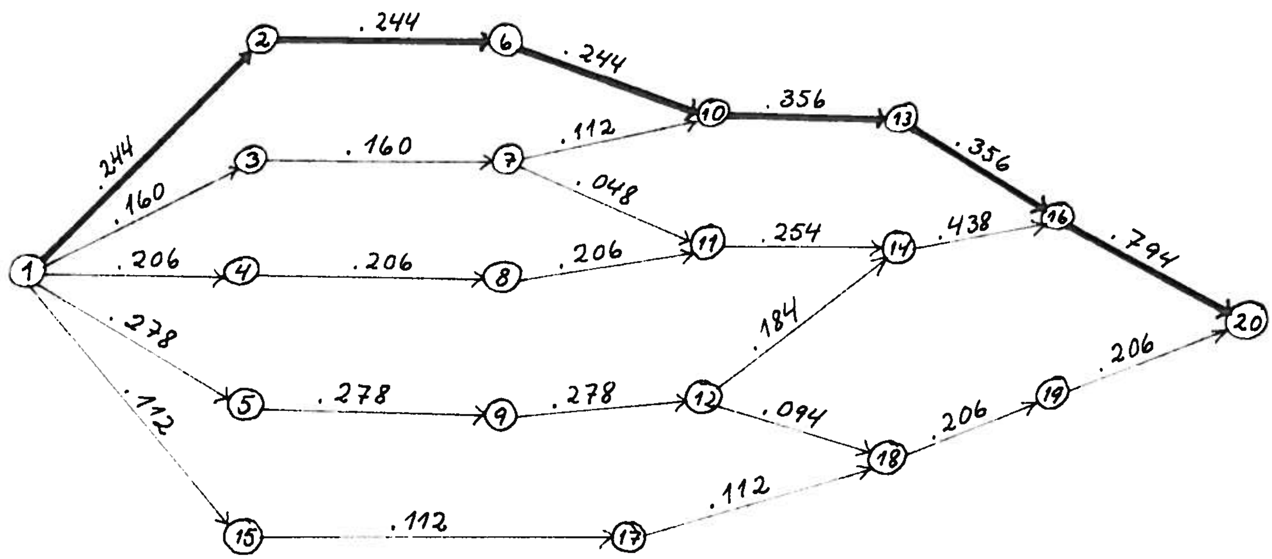
[1]) Vi kan som eksempel utføre beregningen for vårt eksempel III. Først beregner vi hvor mange standardavvik PERT-gjennomsnittet ligger fra simulert gjennomsnitt:

$$\frac{45{,}44 - 48{,}30}{1{,}62} = -1{,}77.$$

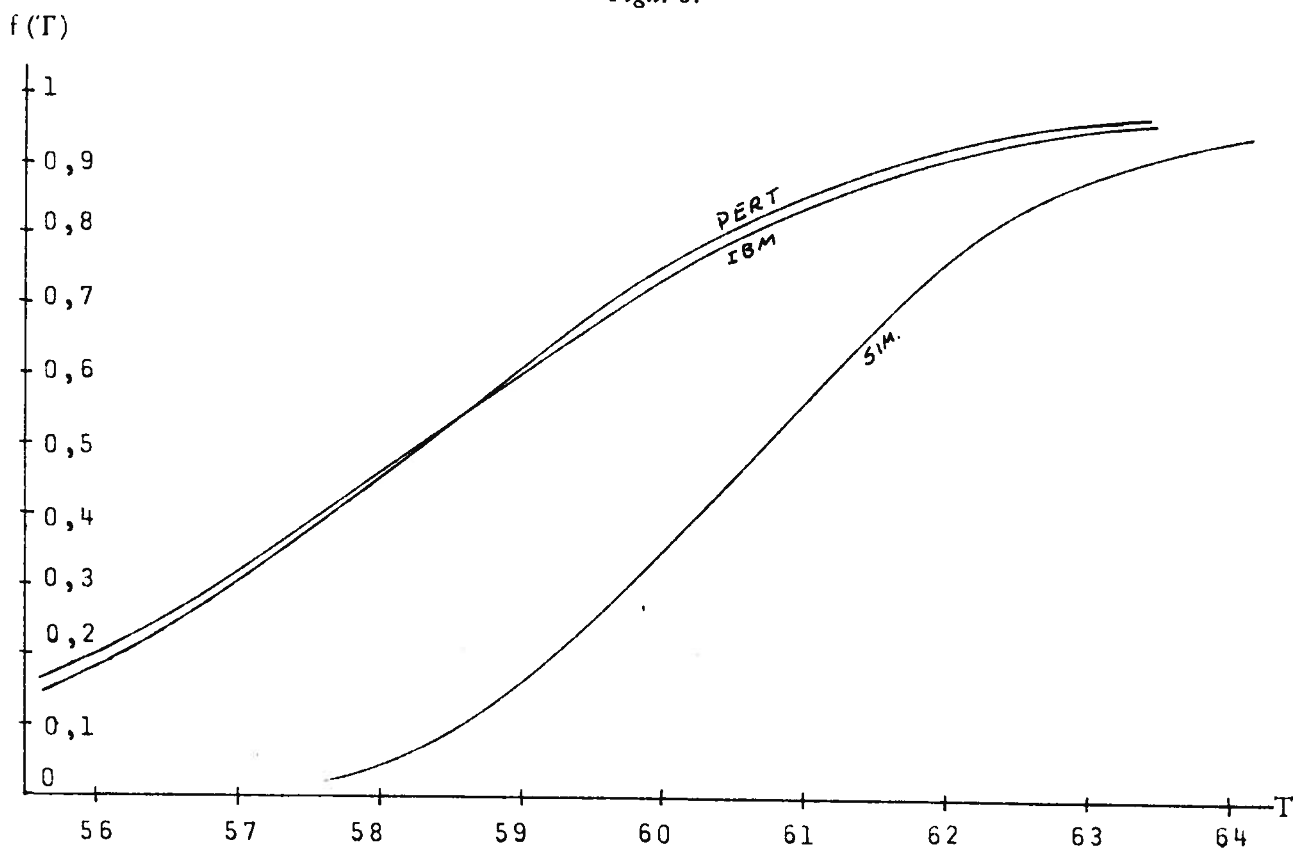
Ved å gå inn i tabell for den kumulative normalfordeling, finner man at dette tall tilsvarer en sannsynlighet på 3,84 %.

[1]) Igjen for eksempel III:

$$\frac{48{,}30 - 45{,}44}{2{,}03} = 1{,}41;$$ dvs. sannsynligheten er 92,1 %.



Figur 8.



Figur 9

Det er vanskelig å ha noen formening om hvor representative våre tre nettverk er. Vi skulle tro at de i sin oppbygning ikke kan betegnes som ekstreme, og i så fall illustrerer de hvor lite man kan stole på sannsynlighetstall beregnet etter tradisjonell PERT eller IBM's versjon av denne metode. Forsøk med flere nettverk viser at man må regne med tall på ca. 10 % eller under i kolonne A og ca. 80 % i kolonne B og C.

Alt annet like kan man generelt si at PERT-feilen både når det gjelder sannsynlighetstall og forventet tid vil øke med antall parallelle grener i nettverket, og minke med graden av avhengighet mellom grenene (dvs. i hvilken grad det går aktiviteter på tvers i nettverket). Feilen vil også øke mere jo mindre forskjell det er i forventet tid på sidegrenene i forhold til den kritiske vei.

Til slutt litt om antall simuleringer kontra sikkerhet i beregningene, og litt om forbruk av computertid. I hver simulering foretar maskinen trekninger i β-fordelingen for hver aktivitet, og på grunnlag av hvert tallsett fremkommet på denne måte beregnes den kritiske vei og tiden langs denne. Tallene for gjennomsnitt og standardavvik i hvert av de ovenstående eksempler er beregnet på grunnlag av 500 simuleringer. Beregner man konfidensintervaller, vil man finne at de virkelige gjennomsnitt for alle eksemplene med 500 simuleringer vil ligge innenfor 0,1—0,2 i absolutt verdi på begge sider av beregnet gjennomsnitt, dette på 95 % nivå. For tallene i kolonne A får vi tilsvarende konfidensintervaller i absolutte prosentverdier på ÷ 1,7 til ÷ 2,4 %, og i kolonne B + 2,3 til + 3,2 %. Ønsker man enda større sikkerhet, kan man øke antall simuleringer, og sikkerheten vil da øke relativt med kvadratroten av den relative økning i antall simuleringer.

På IBM 360/50 brukte et nettverk på 30 aktiviteter ca. $1\frac{3}{4}$ min. computertid på 500 simuleringer, hvilket utgjør ca. 0,2 sekunder pr. simulering.

6. *Konklusjon.*

PERT-metodens pålitelighet vil åpenbart avhenge av i hvilken grad man er i stand til å komme med pålitelige tidsanslag for hver aktivitet, men dette problem har vi ikke behandlet i artikkelen. Eksemplene foran illustrerer at selve beregningsmetoden generelt vil undervurdere prosjektenes forventede tidsforbruk, i våre eksempler med opptil 6 %. Dessuten vil PERT-metoden tendere til å gi for optimistiske sannsynlighetsutsagn for at prosjektet skal være ferdig innen et bestemt tidspunkt.

Dette er ikke ment å være noen advarsel mot å bruke PERT. Metoden kan gi gode holdepunkter hvis man bare er klar over metodens begrensninger og feilkilder, og i hvilken retning disse virker.

Appendix.

Hensikten med dette appendix er å gjøre rede for det statistiske grunnlag for simuleringene i avsnitt 5.

La oss anta at y er β-fordelt. Vi har da at sannsynlighetstettheten for y er gitt ved

$$g(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, y^{\alpha-1}\,(1-y)^{\beta-1}\,, \quad 0 < y < 1$$

A. 1 og

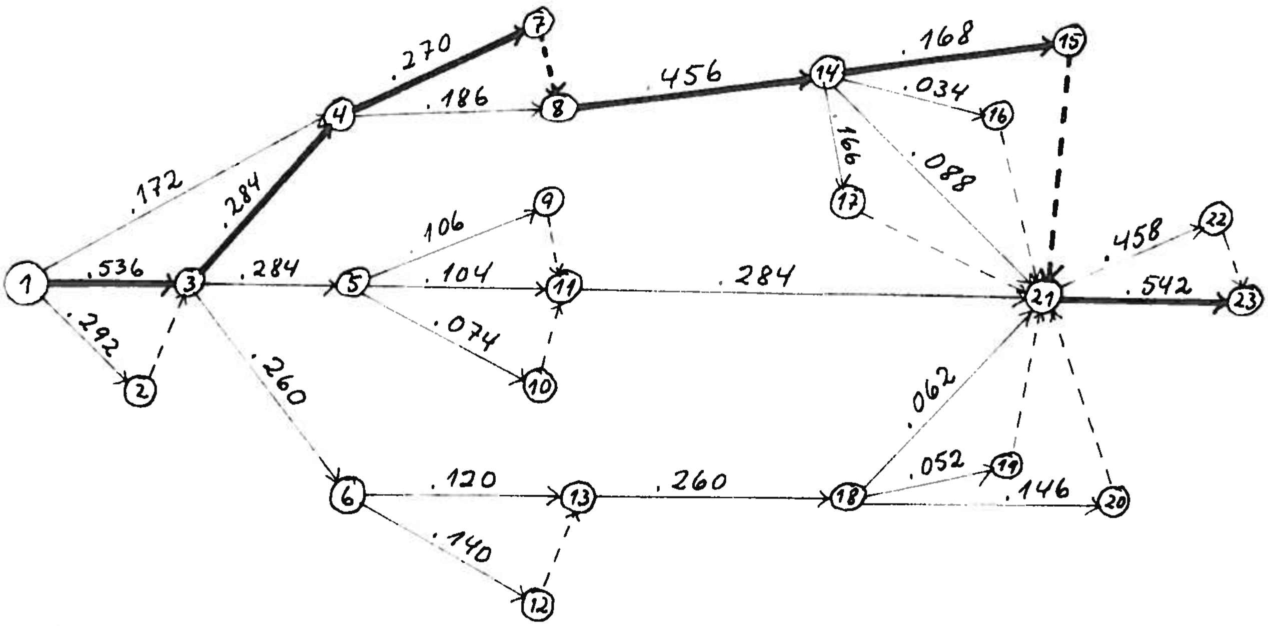
$$g(y) = 0 \text{ ellers.}$$

Legg merke til at hvis α og β er hele tall, da er

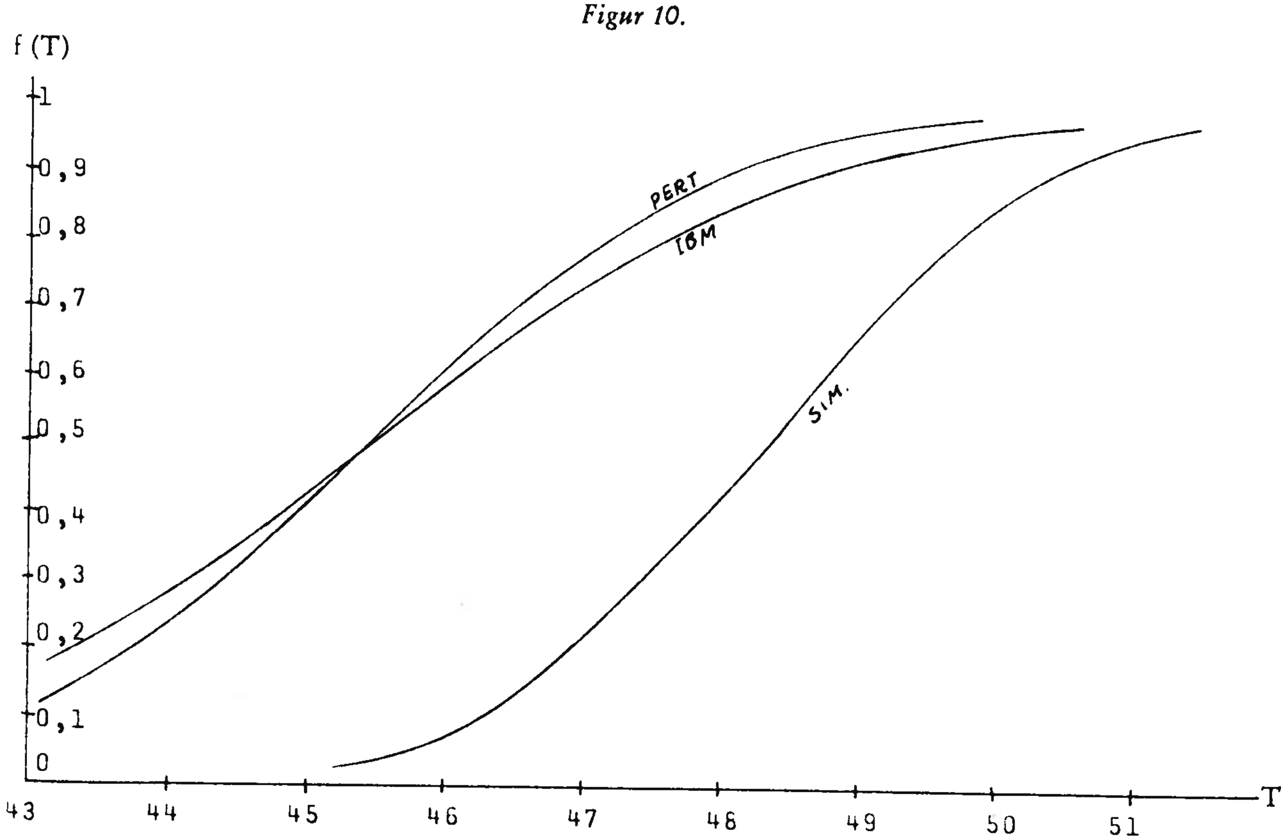
Eksempel III.

Aktivitets start-	ende- begivenhet	o	p	μ	V	Sannsynl.-fordeling nr.
1	2	4,0	13,0	9,14	2,48	2
1	3	7,0	13,0	10,00	1,00	3
1	4	9,0	16,0	13,67	1,56	1
2	3	0	0	0	0	
3	4	3,0	5,0	4,14	0,12	2
3	5	6,0	11,0	8,50	0,69	3
3	6	4,0	11,0	7,50	1,36	3
4	7	4,0	8,0	6,00	0,44	3
4	8	3,0	7,0	5,67	0,51	1
5	9	8,0	14,0	11,0	1,00	3
5	10	8,5	15,0	10,67	1,34	6
5	11	7,0	14,0	11,00	1,50	2
6	12	5,0	12,0	8,50	1,36	3
6	13	6,0	12,0	8,57	1,10	4
7	8	0	0	0	0	
8	14	6,5	13,0	8,94	1,10	5
9	11	0	0	0	0	
10	11	0	0	0	0	
11	21	6,0	12,0	9,00	1,00	3
12	13	0	0	0	0	
13	18	4,0	7,0	6,00	0,29	1
14	15	7,0	12,0	9,86	0,77	2
14	16	6,5	12,0	8,86	0,93	4
14	17	7,0	13,0	9,57	1,10	4
14	21	7,0	13,0	9,25	0,94	5
15	21	0	0	0	0	
16	21	0	0	0	0	
17	21	0	0	0	0	
18	19	4,0	7,0	6,00	0,29	1
18	20	4,0	8,0	6,29	0,49	2
18	21	4,0	8,0	6,00	0,44	3
19	21	0	0	0	0	
20	21	0	0	0	0	
21	22	4,0	8,0	6,29	0,49	2
21	23	4,0	9,0	6,50	0,69	3
22	23	0	0	0	0	

Tabell 4.



Figur 10.



Figur 11.

$$\Gamma(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta-1)!$$
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$
$$\Gamma(\beta) = (\beta-1)!$$

La x være fordelt med sannsynlighetstetthet

A. 2 og
$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$
$$f(x) = 0 \text{ ellers.}$$

La videre $x_1, \ldots x_n$ være et tilfeldig utvalg fra en sannsynlighetsfordeling med sannsynlighetstetthet gitt ved A. 2. La z_1 være den minste av disse n x'ene, z_2 den nest minste og z_k den k'te minste. z_k $(1 \leq k \leq n)$ kalles den k'te ordens statistikk for det tilfeldige utvalget $x_1, \ldots x_n$. z_k er fordelt med sannsynlighetstetthet gitt ved

Eks.	Forventet tid Sim.	PERT	Avvik	Avvik %	Standardavvik Sim.	PERT	IBM	A	B	C
I	45,70	44,10	—1,60	—3,50	1,13	1,65	2,09	7,75	83,4	77,8
II	60,78	58,25	—2,53	—4,17	1,81	2,49	2,70	8,08	84,5	82,6
III	48,30	45,44	—2,86	—5,93	1,62	2,03	2,58	3,84	92,1	86,7

Tabell 5.

$$h(z_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} z_k^{k-1} (1-z_k)^{n-k},$$
$$0 < z_k < 1$$

og

$h(z_k) = 0$ ellers.
z_k er altså β-fordelt med
$\alpha = k$
og
$\beta = n - k + 1$.

Vi kan derfor simulere en β-fordeling der parametrene α og β er hele tall ved hjelp av en k'te ordens statistikk. Vi valgte derfor β-fordelingene i tabell 6.

Legg merke til at forutsetningen i PERT om at variansen skal være $^1/_{36}$ kun er nødvendig for å regne ut forventet tidsforbruk for en aktivitet ved hjelp av formel 1) på side 257.

For hver aktivitet i nettverket ble det spesifisert en sannsynlighetsfordeling (1 til 6) og o (mest optimistisk tid) og p (mest pessimistisk tid). La oss anta at vi for aktivitet i hadde spesifisert sannsynlighetsfordeling 1 og o_i og p_i. Vi har da $\alpha = 4$ og $\beta = 2$. Vi genererer da 5 tilfeldige tall i henhold til sannsynlighetstettheten gitt ved A. 2. Disse tallene rangeres. z_4 er det 4.de laveste, og det simulerte tidsforbruk for aktivitet i er gitt ved

$$t_i = o_i + (p_i - o_i) z_4.$$

Nr.	α	β	k	n	m	μ	V
1	4	2	4	5	3/4	2/3	1/31,5
2	4	3	4	6	3/5	4/7	1/32,75
3	4	4	4	7	1/2	1/2	1/36
4	3	4	3	6	2/5	3/7	1/32,75
5	3	5	3	7	1/3	3/8	1/38,4
6	2	4	2	5	1/5	1/3	1/31,5

Tabell 6.

Ved beregning av forventet tid og den kumulerte sannsynlighetsfordeling etter PERT metoden brukte vi så data for varians og forventning i tabell 6 sammen med tidsanslagene o og p.

For dem som er interessert i mere litteratur om PERT, kan vi nevne følgende i tillegg til artiklene nevnt i innledningen:

Bøker:

Karlsson, Tord: Nätverksplanering.

Miller, Robert W.: Schedule, Cost, and Profit Control with PERT.

Rosenkranz, Friedrich: Netzwerktechnik und wirtschaftliche Anwendung.

Artikler:

Emalghraby, S. E.: «On the expected Duration of PERT Type Networks». Manag. Science 13, 5, 1967, s. 229 ff.

Hartley, H. O.: Wortham, A. W.: «A Statistical Theory for PERT Critical Path Analysis». Manag. Science 12, 10, 1966, serie B, s. 469 ff.

King, W. R., Wilson, T. A.: «Subjective Time Estimates in Critical Path Planning — A preliminary Analysis». Manag. Science, 13, 5, 1967, s. 307 ff.

Klingel, A. R.: «Bias in PERT-Project Completion Time Calculations for a Real Network». Manag. Science 13, 4, 1967, serie B, s. 194 ff.

Ryavec, C. A., MacCrimmon, K. R.: «An Analytical Study of the PERT-Assumptions». Opns. Res. 12, 1, 1964, s. 16 ff.

van Slyke, R. M.: «Monte-Carlo Methods and the PERT-Problem». Opns. Res. 11, 1963, s. 839 ff.

Ovennevnte artikler krever et visst kjennskap til matematikk og statistikk.